

Θεωρία Αριθμών Τμήμα Α Ασκήσεις #2

1) p πρώτος διαιρέτης του $p^k, k > 0$
Αν $a | p^k \Rightarrow \exists q$ πρώτος ο οποίος διαιρεί τον a , ορα κατόν p^k
 $q | p^k = \underbrace{p \cdots p}_{k \text{ φορές}} \Rightarrow q | p \Rightarrow p = q$

Αρα $a = \mu \cdot p^e$ του $p \Rightarrow a = p^e$ με $e \leq k$

Οι διαιρέτες είναι $\underbrace{1, p, p^2, \dots, p^k}_{k+1}$

2) $\sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$

$\sigma(n) = \tau_0$ αθροισμάτων διαιρετών (φυσικών) του n

$$\sigma(2) = 1 + 2 = 3$$

$$\sigma(3) = 1 + 3 = 4$$

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

} πολλαπλασιαστική συνάρτηση
ορα πρέπει να είναι πρώτοι

$$\sigma(6) = \sigma(2) \cdot \sigma(3)$$

$$\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7 \neq \sigma(2) \cdot \sigma(2)$$

$$\sigma(2) + \sigma(3) = \sigma(4)$$

$$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

$$\sigma(12) = \sigma(3 \cdot 4) = \sigma(3) \cdot \sigma(4) = 4 \cdot 7 = 28$$

$$\sigma(p^k) = \overbrace{1 + p + p^2 + \dots + p^k}^{k+1 \text{ φάρυ}} = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

3) $p_1 \cdot p_2 \cdot p_{k+1} =$
 $2 \cdot 3 \cdot 17 + 1 = 59 \cdot 509$

4) (x, y, z) Πυθαγόρεια $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$
 $(a, b, c) \Leftrightarrow (da, db, dc)$
 $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow d^2 a^2 + b^2 d^2 = d^2 c^2$

5) Έστω $a = 2k+1$ και $b = 2m+1$
 $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow (2k+1)^2 + (2m+1)^2 = c^2$
 $4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = c^2$
 $4(k^2 + k + m^2 + m) + 2 = c^2 \Rightarrow c$ άρτιος
 $4(k^2 + k + m^2 + m) + 2 = (2l)^2$
 $4(k^2 + k + m^2 + m) + 2 = 4l^2 \Rightarrow 4/2$ άτοπο!

Άρα ένας άρτιος και άλλος περιττός.

γ) $(a, b, c) = \mu \cdot k \cdot \lambda = L$

$a = 2k$

$b = 2m+1$

$c = 2l+1$

v.s.o

$(c-b), (c+b)$ άρτιοι

$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow 4k^2 + 4m^2 + 4m + 1 = 4l^2 + 4l + 1$
 $k^2 + m^2 + m = l^2 + l$

$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b) \cdot (c+b)$

$4k^2 = (2l-2m)(2m+2l+2) \Rightarrow 2(l-m) \cdot 2(m+l+1)$

$\frac{4k^2}{4} = (l-m)(m+l+1) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{(c-b)}{2} \cdot \frac{(c+b)}{2}$, ίσχυει!

δ) Έστω p πρώτος ώστε $p \mid \left(\frac{c-b}{2}, \frac{c+b}{2}\right) \Rightarrow$

$$p \mid \frac{c-b}{2} + \frac{c+b}{2} = c$$

$$p \mid \frac{c+b}{2} - \frac{c-b}{2} = b$$

$$\text{Το } p \mid \frac{c-b}{2} \text{ και } \frac{c+b}{2} \Rightarrow p^2 \mid \frac{c-b}{2} + \frac{c+b}{2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow p \mid \frac{a}{2} \Rightarrow p \mid a \text{ και } p \mid c, b \Rightarrow p \mid (a, b, c) = \text{ΜΚΔ, άτοπο!}$$

Επίσης $\frac{c-b}{2}$ και $\frac{c+b}{2}$ είναι τετραγωνα

$$\frac{c-b}{2} \mid \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c-b}{2} \cdot \frac{c+b}{2}$$

πρώτοι

$$\eta \frac{a}{2} = p_1^{k_1} \cdot p_t^{k_t} \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (p_1^{2k_1}) \cdot \dots \cdot p_t^{2k_t} = \frac{c-b}{2} \cdot \frac{c+b}{2}$$

πρώτοι μεταξύ τους

$$\Rightarrow p_i^{2k_i} \text{ θα βρεθείται αποτελεσμα στο } \frac{c-b}{2} \text{ ή } \frac{c+b}{2}$$

Αρα αυτοι οι αριθμοι είναι γινόμενα τετραγωνων. Δηλαδή είναι τετραγωνα

$$\epsilon) \frac{c-b}{2} = m^2 \text{ και } \frac{c+b}{2} = n^2 \text{ τότε}$$

$$\frac{c-b}{2} + \frac{c+b}{2} = m^2 + n^2 \Leftrightarrow \boxed{c = m^2 + n^2}$$

$$\frac{c+b}{2} - \frac{c-b}{2} = n^2 - m^2 \Leftrightarrow \boxed{b = n^2 - m^2}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c-b}{2} \cdot \frac{c+b}{2} = m^2 n^2 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = m \cdot n \Leftrightarrow \boxed{a = 2mn}$$

$$\sigma\tau) \quad a^2 + b^2 = c^2$$

5) $2 \leq r \leq n$

$$\binom{n+2}{r} - \binom{n}{r-2} + 2 \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

$$(n-r)!(n-r+1)$$

$$\binom{n+2}{r} = \frac{(n+2)!}{r!(n+2-r)!} = \frac{n!(n+1)(n+2)}{(r-2)!(r-1)r(n-r+1)(n-r+2)} = \frac{n!(n+1)(n+2)}{(r-2)!(r-1)r(n-r+1)(n-r+2)}$$

$$\binom{n}{r-2} = \frac{n!}{(r-2)!(n-r+2)!} = \frac{n!}{(r-2)!(n-r+1)(n-r+2)} \quad (1)$$

$$\binom{n}{r-1} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} = \frac{n!}{(r-2)!(r-1)(n-r+1)!} = \frac{n!}{(r-2)!(r-1)(n-r+1)(n-r+2)}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-2)!(r-1)r(n-r)!} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & 1) + 2(3) + (3) = \\ & = \frac{n!}{(r-2)!(n-r)!} \cdot \left(\frac{1r(n-1)}{(r-1)(n-r+2)} + \frac{2r(n-r+2)}{(r-1)(n-r+1)} + \frac{(n-r+1)}{(r-1)r} \right) \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{r(r-1)(n-r+1)(n-r+2)} \\ & \quad r(r-1) + 2r(n-r+2) + (n-r+1)(n-r+2) = (n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Εύρεση των ΜΚΔ

$$(540, 66) = \dots = a540 + b66$$

$$540 = 66 \cdot 8 + 12 \rightarrow 12 = 540 - 66 \cdot 8$$

$$66 = 12 \cdot 5 + 6 \rightarrow 6 = 66 - 12 \cdot 5$$

$$12 = 6 \cdot 2 + 0$$

$$6 = 66 - 12 \cdot 5 = 66 - 5 \cdot (540 - 66 \cdot 8)$$

$$= 66 - 540 \cdot 5 + 66 \cdot 40$$

$$= (-5) \cdot 540 + (41) \cdot 66$$

Επίλυση Πρώτου Βαθμού

$$ax + by = c \quad x, y \text{ μεταβλητές}$$

a, b, c σταθερές

$$3x - 7y = -10 \Rightarrow 3x = 7y - 10$$

$$x = \frac{7}{3}y - \frac{10}{3}$$

$$7y = 3x + 10 \Rightarrow y = \frac{3}{7}x + \frac{10}{7} \quad x \in \mathbb{R}$$

Διοφαντικές Εξισώσεις

Η εξίσωση $ax + by = c$ με a, b, c ακέραιους και οκτώ αριθμούς ονομάζεται Διοφαντική.

$$\text{Πχ } 2x + 10y = 3$$

Αν είχαμε λύσεις ακέραιες x_0, y_0 , τότε

$$2(\underbrace{x_0}_{\text{ακέραιος}} + 5y_0) = 3 \Rightarrow 2/3$$

Θεώρημα (Διοφαντός)

Η εξίσωση $ax+by=c$ με $a, b, c \in \mathbb{Z}$

έχει απειράει λύσεις αν $(a, b) = d \mid c$

ο Μ.Κ.Δ a και b διαιρεί το c

Αν (x_0, y_0) αποτελεί λύση, τότε όλες οι λύσεις
δίνονται από $x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t$ και $y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t$ με $t \in \mathbb{Z}$

Απόδειξη

Αποδ " $\Rightarrow$ " Έστω (x_0, y_0) λύση, τότε

$$ax_0 + by_0 = c \text{ και επειδή } d = (a, b)$$

διαιρεί το a και b , θα διαιρεί και
το ax_0, by_0 . Άρα και το άθροισμά τους:

$$d \mid ax_0 + by_0 = c$$

Διαφορετικά: Αν $d \nmid c = ax + by$

τότε δεν υπάρχει λύση.

Και δείχνουμε ότι $x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t$ και $y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t$

αποτελούν λύσεις. Εξετάζουμε αν την επαληθεύουν:

$$ax + by = ax_0 + \frac{ab}{d} \cdot t + by_0 - \frac{ab}{d} \cdot t = ax_0 + by_0 = c$$

Για να βρούμε μία λύση (x_0, y_0)

$$d \mid (a, b) \Leftrightarrow \exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z} \text{ με } d = ax_0 + by_0 \quad (1)$$

Επίσης $d \mid c$ (για να έχουμε λύση)

$$c = d \cdot d' \quad (2)$$

$$(1) \text{ και } (2) \Rightarrow c = d \cdot d' = ax_0 + by_0$$

Μία λύση είναι

$$n \cdot (d'x_0, d'y_0)$$

Π.Χ. Να λυθεί η Διοφαντική

$$1876x + 365y = 13$$

$(1876, 365) = 1$ ή 13 για να έχουμε λύση

$$(1876, 365) = (1876, 5 \cdot 73) = (1876, 73)$$

Διαίρετες πρώτοι του $73 \leq \sqrt{73} \Rightarrow 2, 3, 5, 7 \Rightarrow 73$ πρώτος

Άρα $(1876, 365) = (1876, 73) = 1$ και $1/13$ Άρα έχουμε λύση

$$(1876, 365) = 1$$

$$1876 = 365 \cdot 5 + 51 \rightarrow 51 = 1876 - 365 \cdot 5$$

$$365 = 51 \cdot 7 + 8 \rightarrow 8 = 365 - 51 \cdot 7$$

$$51 = 8 \cdot 6 + 3 \rightarrow 3 = 51 - 8 \cdot 6$$

$$8 = 3 \cdot 2 + 2 \rightarrow 2 = 8 - 3 \cdot 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 \cdot (8 - 3 \cdot 2) = 3 - 8 + 3 \cdot 2 = -8 + 3 \cdot 3$$

$$= -8 + 3 \cdot (51 - 8 \cdot 6) = -8 + 3 \cdot 51 - 3 \cdot 8 \cdot 6 = 8 + 3 \cdot 51 - 8 \cdot 18$$

$$= 3 \cdot 51 - 8 \cdot 19 = 3 \cdot 51 - 14(365 - 51 \cdot 7)$$

$$= 3 \cdot 51 - 14 \cdot 365 + 51 \cdot 7 \cdot 14 = -14 \cdot 365 + 51(3 + 7 \cdot 14)$$

$$= -14 \cdot 365 + (1876 - 365 \cdot 5)(3 + 7 \cdot 14)$$

$$= 1876(3 + 7 \cdot 14) + 365(-14 - 35 \cdot 14)$$

Μια λύση $\underbrace{(3 + 7 \cdot 14) \cdot 13}_{x_0}, \underbrace{(-34 - 35 \cdot 14) \cdot 13}_{y_0}$

Γενική λύση $1876x + 365y = 13$

$$x = (3 + 7 \cdot 14) \cdot 13 + 365t \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$y = -(34 + 35 \cdot 14) \cdot 13 - 1876t$$

No.

Date

Σύμφωνα με την τελευταία
εξίσωση

$$\text{π.χ. } 2x + 3y = 1$$

$$2 \cdot \underset{\downarrow x_0}{(-1)} + 3 \cdot \underset{\downarrow y_0}{1} = 1 = \text{M.K.A.}(2, 3)$$

$$x = x_0 + \frac{b}{a} t = -1 + \frac{3}{1} t = -1 + 3t$$

$$y = y_0 - \frac{a}{b} t = 1 - \frac{2}{1} t = 1 - 2t$$

Παρα επαλήθευση:

$$2x + 3y = 1$$

$$2(-1 + 3t) + 3(1 - 2t) = -2 + 6t + 3 - 6t = 1$$